Chapter 3

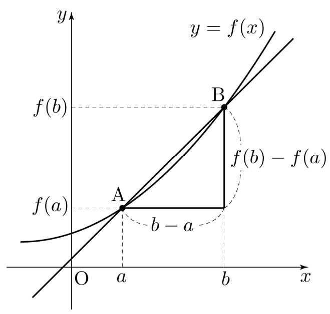
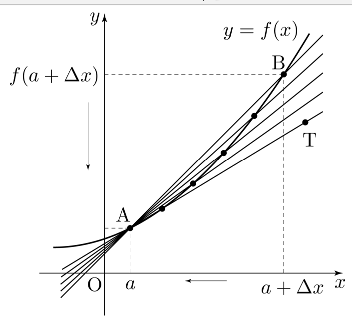
미분계수의 정의

NOTE

- ■ 미분계수의 탄생 배경과 의미 이해하기
- ■ 정의에 입각한 미분계수 구하기
- ■ 도함수의 정의에 의하여 도함수 구하기
- ■ 미분 가능한 상황과 불가능한 상황 이해하기

01 미분계수의 정의

1 정의

	평균변화율	순간변화율
정의	 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점, $\mathrm{B}(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기	 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{B}(a+\Delta x,\ f(a+\Delta x))$이 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$로 한 없이 가까워 질 때의 직선의 기울기
표현법	$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $(b=a+\Delta x)$ $=\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$	$f'(a)=\displaystyle\lim_{\triangle x\to 0}\dfrac{f(a+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}$ $=\displaystyle\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

- 순간변화율(=미분계수=접선의 기울기)

  함수 $y=f(x)$에서 구간 $[a,\ a+\triangle x]$에서의 평균변화율의 $\triangle x \to 0$일 때 극한값

  즉, $\displaystyle\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(a+\triangle x)-f(a)}{\triangle x}$가 존재할 때, 이 극한값을 $f(x)$의 $x=a$에서의 (순간)변화율 또는 미분계수라 하고, $f'(a)$, $y'_{x=a}$, $\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=a}$로 나타낸다.

  즉, $f'(a)=\displaystyle\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(a+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

2 미분계수 구하기 by 미분계수의 정의

- $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

필수예제 01

$f'(1)=3,\ f(1)=3$ 일 때, $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ 의 값을 구하시오.

필수예제 02

$f'(1)=3,\ f(1)=3$ 일 때, $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1-3h)}{h}$ 의 값을 구하시오.

필수예제 03

$f'(1)=3,\ f(1)=3$ 일 때, $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h+h^2)-f(1)}{2h+h^2}$ 의 값을 구하시오.

• $f'(a)=\lim_{x \to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

필수예제 01

$f'(1)=3,\ f(1)=3$ 일 때, $\lim_{x \to a}\frac{f(x)-f(1)}{x^3-1}$ 의 값을 구하시오.

필수예제 02

$f'(1)=3,\ f(1)=3$ 일 때, $\lim_{x \to a}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}$ 의 값을 구하시오.

필수예제 03

$f'(1)=3,\ f(1)=3$ 일 때, $\lim_{x \to a}\frac{x^2f(1)-f(x)}{x-1}$ 의 값을 구하시오.

02 도함수의 정의와 공식

1 정의

- 함수 $y=f(x)$에서

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

  를 x에 관한 y 의 도함수라 한다.
- y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$으로 나타낸다.
- 함수 $y=f(x)$에서 도함수 $f'(x)$를 구하는 것을 $f(x)$를 x에 관하여 미분한다고 하고 그 계산법을 미분법이라 한다.
- 함수 $y=f(x)$에서 도함수 $f'(x)$에 $x=a$ 를 대입하면 $y=f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 미분계수가 된다.

2 도함수의 공식

• $f(x)=c$ (상수)	$f'(x)=0$
• $y=x^n$ (n은 정수)	$y'=nx^{n-1}$
• $y=cf(x)$ (c는 상수)	$y'=cf'(x)$
• $y=f(x)\pm g(x)$	$y'=f'(x)\pm g'(x)$
• $y=f(x)g(x)$	$y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
• $y=\{f(x)\}^n$	$y=n\{f(x)\}^{n-1}\cdot f'(x)$

03 미분 가능성

정의

- 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

가 존재하면 이 함수는 $x=a$에서 미분가능하다고 하며, $f'(a)$가 존재하지 않으면 미분가능하지 않다고 한다.

- 실전

좌$(a)=$우(a) 좌$'(a)=$우$'(a)$	함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 미분가능 하다.

필수예제 01

함수 $f(x)=\begin{cases}x^2 & (x\geq0)\\ x^3 & (x<0)\end{cases}$ 가 $x=0$ 에서 미분가능 한 지 조사하시오.

필수예제 02

함수 $f(x)=|x|$ 가 $x=0$ 에서 미분가능 한 지 조사하시오.

필수예제 03

함수 $f(x)=x|x|$ 가 $x=0$ 에서 미분가능 한 지 조사하시오.

필수예제 03

함수 $f(x)=x|x|$가 $x=0$에서 미분가능 한 지 조사하시오.

필수예제 04

3점 수능 기출

함수

$$f(x)=\begin{cases} x^3+ax & (x<1) \\ bx^2+x+1 & (x \geq 1) \end{cases}$$

이 $x=1$에서 미분가능할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

2 성질

- 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이 된다.
- 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 반드시 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지는 않는다.
- 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 불연속이면 구간에서 미분불가능하다

필수예제 01

함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능이면 $y=f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.'의 역이 성립하지 않음을 반례를 들어 증명하고자 한다. 다음 중 반례로서 적당한 함수는?

① $y=x^4$ ② $y=\dfrac{1}{2x}$ ③ $y=|x|$

④ $y=\begin{cases} x^3 & (x \geq 0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$ ⑤ $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$

Chapter 3 연습문제

미분계수의 정의

01 교육청 기출

함수 $f(x)=3x^2-2x$에 대하여 x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 평균변화율과 $x=1$에서의 미분계수가 같을 때, 상수 a의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

02 평가원 기출

함수 $f(x)$가 $f(x+2)-f(2)=x^3+6x^2+14x$를 만족시킬 때, $f'(2)$의 값을 구하시오.

03 수능 기출

$x=a$에서 함수 $f(x)$의 미분계수는 2이다. 미분 가능한 함수 $g(x)$에 대하여

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)-g(h)}{h}=0$$

이 성립할 때, $\lim_{h\to0}\frac{g(h)}{h}$의 값을 구하시오.

04 수능 기출

다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}n\left(f\left(a+\frac{b}{n}\right)-f\left(a-\frac{b}{n}\right)\right)$의 값은? (단, $b\neq0$)

① 0 ② $\frac{1}{b}f(a)$ ③ $bf'(a)$ ④ $2bf'(a)$ ⑤ $f'(a)$

05

$f(0)=0$, $f'(0)=2$일 때, $\lim_{n\to\infty} nf\left(\frac{1}{2n}\right)$의 값을 구하시오

06

함수 $f(x)=x^5+ax^2+bx+2$가 두 조건

$$f(1)=4, \qquad \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\frac{9}{2}$$

를 만족할 때, 상수 a,b에 대하여 $-ab$의 값을 구하시오.

07 수능 기출

다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=3$, $\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x^2-1}=3$ 을 만족시킬 때, 함수 $y=f(x)g(x)$의 $x=1$ 에서의 미분계수는?

① 6 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 20

08

함수 $f(x)=(1+x)(1+2x)(1+3x)\cdots(1+10x)$에 대하여 $f'(0)$의 값은?

① 1 ② 10 ③ 15 ④ 30 ⑤ 55

09

다항식 x^8-x+3을 $(x-1)^2$으로 나눌 때의 나머지를 구하시오.

10

$\lim_{x \to -1} \frac{x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6-1}{x+1}$의 값은?

① -8 ② -2 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

11

다항함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족할 때, $f(5)$ 의 값은?

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $2f(x)=xf'(x)-4$
(나) $f(1)=1$

① 71 ② 72 ③ 73 ④ 74 ⑤ 75

12

미분가능한 함수 $f(x)$ 가 임의의 두 실수 x, y 에 대하여

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$$

를 만족시키고 $f'(0)=4$ 일 때, 다음 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보 기

ㄱ. $f'(x)=2x+4$
ㄴ. $f(x)+f(-x)=2x^2$
ㄷ. 모든 실수 a 에 대하여 $f(a)=\lim_{x\to a}f(x)$ 이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13

항상 양의 값을 갖는 $f(x)$가 임의의 실수 x, y에 대하여

$$f(x+y)=3f(x)f(y)$$

를 만족시킨다. $f'(0)=2$일 때, $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$의 값을 구하시오.

14 수능 기출

미분가능한 함수

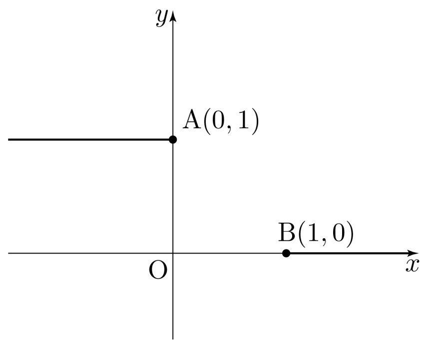
$$f(x)=\begin{cases} x^3+ax & (x<1) \\ bx^2+x+1 & (x\geq 1) \end{cases}$$

에 대하여 $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

15 수능 기출

다음 그림은 함수 $y=1$과 함수 $y=0$의 그래프의 일부이다. 두 점 $\mathrm{A}(0,1)$, $\mathrm{B}(1,0)$ 사이를 $0 \le x \le 1$에서 정의된 함수 $y=ax^3+bx^2+cx+1$ 의 그래프를 이용하여 연결하였다. 이렇게 연결된 그래프 전체를 나타내는 함수가 구간$(-\infty,\infty)$에서 미분 가능하도록 상수 a,b,c 의 값을 정할 때, $a^2+b^2+c^2$ 의 값을 구하시오.



16

함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족하고 모든 실수 x에 대하여 미분가능 할 때 상수 a,b의 합 $a+b$을 구하시오.

(가) $f(x)=x^3+ax^2+bx \ (0 \le x \le 2)$
(나) $f(x)=f(x+2)$ (x는 모든 실수)