

TOPIC 2 이차함수의 성질

두 근의 차의 Hidden Structure ①

* 꼭짓점까지의 거리

올림포스 고난도 5강 도전문제



1등급
유제1

이차함수 $y = x^2 - kx + 5$ 의 그래프와 x 축이 두 점 A, B에서 만난다. $\overline{AB} = 4$ 가 되도록 하는 모든 실수 k 의 값의 곱은?

- ① -42
- ② -36
- ③ -30
- ④ -24
- ⑤ -18



최고차항의 계수가 음수인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(0)=f(2)$ 이고, -1 는 이차방정식 $f(x)=0$ 의 근이다. $f(0)=3$ 일 때, $f(1)$ 의 값은?

- ① 4
- ② 5
- ③ 6
- ④ 7
- ⑤ 8

14

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리가 a , 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=3$ 과 서로 다른 두 교점 사이의 거리가 $a+4$, 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=8$ 의 서로 다른 두 교점 사이의 거리가 $a+8$ 이다. 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=m$ 이 한 점에서 만날 때, 상수 m 의 값은?
(단, a 는 상수이다.)

- ① -4
- ② -3
- ③ -2
- ④ -1
- ⑤ $-\frac{1}{2}$

15

올림포스 고난도 5강 1등급 문제

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축은 서로 다른 두 점에서 만나고, 이차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 이차함수 $y=x^2-4x$ 의 그래프와 x 축이 만나는 두 점 중에서 한 점만을 지난다.
- (나) 함수 $y=f(x)+4$ 의 그래프와 x 축은 한 점에서 만난다.

$f(5)<0$ 일 때, $f(6)$ 의 값을 구하시오.

16

올림포스 고난도 5강 1등급 문제

두 유리수 a, b 에 대하여 이차함수 $f(x)=x^2+ax-4$ 의 그래프와 일차함수 $g(x)=2x+b$ 의 그래프가 두 점 A, B에서 만나고 점 A의 x 좌표는 $3-\sqrt{5}$ 이다. 함수 $h(x)$ 를

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\leq g(x)) \\ g(x) & (f(x)>g(x)) \end{cases}$$

라 할 때, 방정식 $h(x)=t$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 실수 t 의 값의 범위는 $\alpha < t < \beta$ 이다. $\alpha + (\beta+2)^2$ 의 값은?

- ① 10
- ② 11
- ③ 12
- ④ 13
- ⑤ 14

다항식
방정식과 부등식
수
이차함수
방정식
방정식

최고차항의 계수가 모두 양수인 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq f(1)$, $g(x) \geq g(-3)$ 이고,
 $f(0) = g(0) = 0$ 이다.
- (나) 두 방정식 $f(x) + 9 = 0$, $g(x) + 9 = 0$ 중 하나는 중근을 갖고, 다른
 하나는 서로 다른 두 허근을 갖는다.
- (다) $|f(1) - g(-3)| = 7$, $f(1) + g(1) > 0$

$-3 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $f(x) + g(x)$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값은?

- ① $\frac{62}{3}$ ② 21 ③ $\frac{64}{3}$ ④ $\frac{65}{3}$ ⑤ 22

18

고쟁이 5강 STEP3

두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 한 점 $(0, 0)$ 에서만 만난다.
- (나) 부등식 $f(x)+g(x) \geq 0$ 의 해는 $x \geq 3$ 이다.
- (다) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)-g(x) \geq f(2)-g(2)$ 이다.

x 에 대한 방정식 $\{f(x)-k\} \times \{g(x)-k\} = 0$ 이 실근을 갖지 않도록 하는 정수 k 의 개수가 3일 때, $f(8)+g(8)$ 의 최댓값을 구하시오.

이차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=kx+8$ 와의 서로 다른 두 교점의 x 좌표를 각각 α, β 라 할 때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 꼭짓점이 직선 $y=kx$ 위에 있다.
 (나) 직선 $x = \frac{1}{2}(\alpha + \beta - 2)$ 에 대하여 대칭이다.

$|\alpha - \beta|$ 의 값은? (단, k 는 상수이다.)

- ① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4
 ④ 6 ⑤ 7

두 근의 차의 Hidden Structure ②

* 접선

올림포스 고난도 5강 도전문제



1등급
유제3

이차함수 $f(x) = x^2 + ax + b$ 의 그래프와 x 축은 두 점 $A(1, 0)$, $B(3, 0)$ 에서 만나고,
 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = -2x + c$ 는 접할 때, $a + b + c$ 의 값은?
 (단, a, b, c 는 상수이다.)

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ -1 ⑤ -2



이차함수 $y = x^2 - 5x + 10$ 의 그래프와 직선 $y = x + k$ 가 서로 다른 두 점 A, B에서 만나고, 두 점 A, B의 x 좌표가 모두 양수가 되도록 하는 정수 k 의 개수는?

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

20

이차함수 $f(x) = -x^2 + ax + b$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, 이차방정식 $f(x) + a = 0$ 의 서로 다른 모든 실근의 곱을 구하시오. (단, a, b 는 실수이다.)

- (가) $f(1) = f(5)$
 (나) 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = 4x + 5$ 은 한 점에서 만난다.

21

올림포스 고난도 5강 1등급 문제

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq f(-1)$ 이다.
 (나) $f(1)=0$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=3x+k$ 가 접할 때, 상수 k 의 값은?

- ① -3 ② $-\frac{13}{4}$ ③ $-\frac{14}{4}$ ④ $-\frac{15}{4}$ ⑤ -4

22

고쟁이 5강 STEP3

이차함수 $y=x^2+2ax+a^2-15$ 의 그래프와 직선 $y=6x-n$ 이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 자연수 n 의 개수를 $f(a)$ 라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, a 는 실수이다.)

보 기

ㄱ. $f(2)=11$
 ㄴ. 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 이다.
 ㄷ. $f(0)+f(1)+f(2)+\dots+f(10)=56$

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

Short CUT!

고쟁이 5강 STEP3

이차함수 $y = x^2 - 2kx + k^2 + 4k$ 의 그래프와 직선 $y = ax + b$ 가 실수 k 의 값에 관계없이 항상 접할 때, 두 상수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값은?

① -8

② -4

③ 0

④ 4

⑤ 8

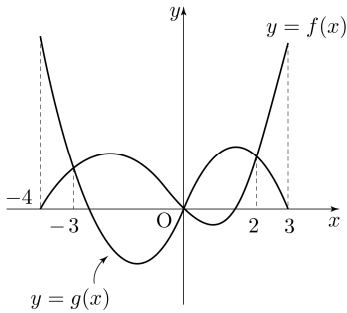
이차함수와 평행한 두 직선의 근의 곱

Short CUT!

이차항의 계수가 -1 인 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점 $(a, f(a))$ 가 직선 $y=x+k$ 위에 있다. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=x$ 와 서로 다른 두 점 A, B에서 만나고, 점 A, B의 x 좌표를 각각 α, β 라고 하자. 이때 점 A를 지나고 x 축에 평행한 직선이 이차함수 $y=f(x)$ 와 만나는 점을 C, 점 B를 지나고 x 축에 평행한 직선이 이차함수 $y=f(x)$ 와 만나는 점을 D라 하자. 사다리꼴 ACBD의 넓이가 5일 때, 상수 k 의 값을 구하시오.

01

x 의 값의 범위가 $-4 \leq x \leq 3$ 일 때, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 그림과 같다. 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 실근의 개수를 a , 모든 실근의 합을 b 라 할 때, $a-b$ 의 값은?



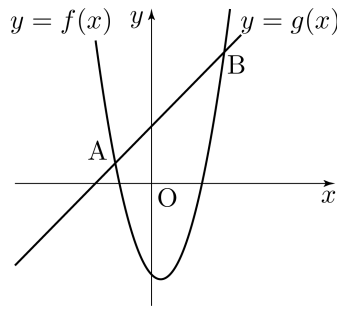
- ① 2 ② 3 ③ 4
- ④ 5 ⑤ 6

02

함수 $f(x) = \begin{cases} -x^2+6x+1 & (x < 5) \\ x^2-6x+11 & (x \geq 5) \end{cases}$ 에 대하여 방정식 $f(x)=k$ 가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 모든 정수 k 의 값의 합을 구하시오.

03

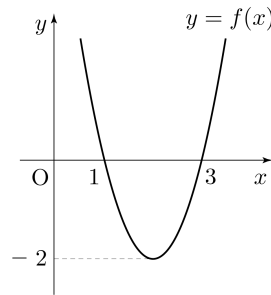
그림과 같이 함수 $f(x)=x^2-x-5$ 와 $g(x)=x+3$ 의 그래프가 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 방정식 $f(2x-k)=g(2x-k)$ 의 두 실근의 합이 3일 때, 상수 k 의 값은?



- ① 1 ② 2 ③ 3
- ④ 4 ⑤ 5

04

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 방정식 $|f(x)|=2$ 의 서로 다른 모든 실근의 합은?



- ① 2 ② 4 ③ 6
- ④ 8 ⑤ 10

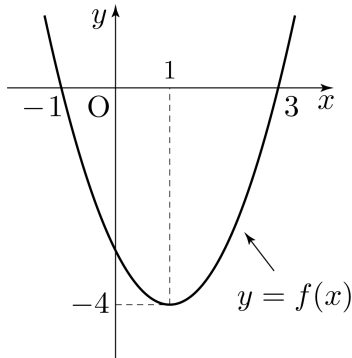
05

이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 에서 $a < 0, b > 0, c > 0$ 일 때, 방정식 $f(x) - |x| = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는?

- ① 없다. ② 1 ③ 2
- ④ 3 ⑤ 4

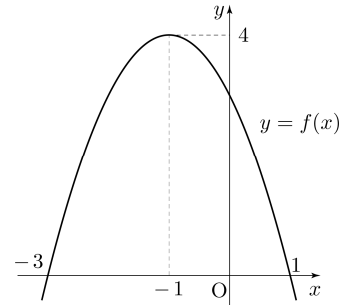
06

이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때 방정식 $f(|x|) + 3 = 0$ 의 모든 실근의 합을 구하시오.



07

이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 방정식 $f(|f(x)|) = 0$ 의 실근의 개수는 a 이고, 실근 중에서 가장 작은 근과 가장 큰 근의 합은 b 이다. 이때 $\frac{a}{b}$ 의 값을 구하시오.



08

함수 $y = |x^2 - 8x|$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 정수 a 의 개수는?

- ① 13 ② 14 ③ 15
- ④ 16 ⑤ 17

다들 다

방정식과 부등식

수

문

09

x 에 대한 방정식 $|x^2-1|-mx+2m=0$ 이 서로 다른 4개의 실근을 갖도록 하는 실수 m 의 값의 범위는 $a < m < b$ 이다. 이때, $a+b$ 의 값은?

- ① $-4+2\sqrt{3}$ ② $4-2\sqrt{3}$ ③ $-2+\sqrt{3}$
 ④ $2-\sqrt{3}$ ⑤ $-1+\sqrt{3}$

10

x 에 대한 이차방정식 $x^2+2(k-1)|x|+k^2-3k-4=0$ 이 서로 다른 네 실근을 갖는다고 할 때, 이를 만족시키는 실수 k 의 값의 범위는?

- ① $-5 < k < -1$ ② $-5 \leq k < -1$
 ③ $-1 < k \leq 1$ ④ $-1 < k < 1$
 ⑤ $1 < k < 4$

11

직선 $y=x+k$ 와 $|y|=x^2-3|x|+2$ 의 그래프의 교점의 개수를 $N(k)$ 라 할 때, $N(1)+N(2)+N(3)$ 의 값은?

- ① 8 ② 9 ③ 10
 ④ 11 ⑤ 12

12

이차방정식 $x^2-2x+k+2=0$ 의 두 근이 모두 2보다 작고, 이차방정식 $x^2-(k+2)x-3=0$ 의 두 근 사이에 2가 있도록 하는 실수 k 의 값의 범위는?

- ① $-\frac{3}{2} \leq k \leq -1$ ② $-2 \leq k \leq -1$
 ③ $-\frac{3}{2} < k \leq -1$ ④ $-2 < k \leq -1$
 ⑤ $-\frac{3}{2} < k < -1$

13

이차방정식 $x^2 - 2kx + 2 - k = 0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 1보다 작을 때, 정수 k 의 최댓값을 구하시오.

14

이차방정식 $x^2 + (a-2)x - 2a + 4 = 0$ 이 $-2 < x < 1$ 에서 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

- ① $a < -6$ ② $-6 < a < 2$ ③ $2 < a < 3$
 ④ $3 < a < 4$ ⑤ $a > 4$

15

이차방정식 $x^2 - (m+1)x + 2m = 0$ 이 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 적어도 한 개의 실근을 갖도록 하는 실수 m 의 값의

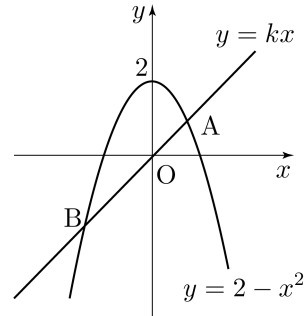
범위는 $p \leq m \leq q$ 이다. 이때, $\frac{9}{2}p + q$ 의 값은?

- ① $-2\sqrt{2}$ ② $-\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{2}$
 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

16

그림과 같이 좌표평면 위에서

함수 $y = 2 - x^2$ 의 그래프와 직선 $y = kx$ 가 서로 다른 두점 A, B에서 만날 때, $\overline{OA} : \overline{OB} = 1 : 2$ 가 되도록 하는 양수 k 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)



다항식

방정식과 부등식

수

평면