

Q 알아야 하는 교과내용

01 명제의 참, 거짓 판단

수학에서 이미 정의해놓은 기본명제를 활용하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판단할 수 있어야 하고 조건과 조건으로 이루어진 명제에 대하여 진리집합의 포함관계를 통하여 명제의 참, 거짓을 판단할 수 있어야 한다.

02 NEW 절대부등식

완전제곱식, 산술평균과 기하평균, 코시-슈바르츠의 절대부등식은 기본적으로 숙지하고 교과과정에서 나오지 않는 멱평균, 코시-엔겔, 네스빗 등 새로운 절대부등식을 학습하고 내신 시험에 최고난도로 나오는 문항들을 해결할 수 있어야 한다.

1 명제의 참, 거짓

▶ 기본명제의 활용

1등급 유제1

역은 참이고, 대우는 거짓인 명제인 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

(단, a, b 는 실수이다.)

보기

- ㄱ. $a^2 = b^2$ 이면 $a^3 = b^3$ 이다.
- ㄴ. $|a| + |b| = 0$ 이면 $a^2 + b^2 = 0$ 이다.
- ㄷ. $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이면 $ab \neq 0$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3 새로운 절대 부등식

▶ 제곱근의 역평균

역평균 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

• $a > 0, b > 0$ 일 때,

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

(단, 등호는 $a=b$ 일 때 성립)

역평균 \geq 산술 \geq 기하 \geq 조화

도형의 방정식

진함과 명제

함수

1등급 유제1

$x > 0, y > 0$ 이고 $3x+5y=10$ 일 때, $\sqrt{3x} + \sqrt{5y}$ 의 최댓값을 구하시오.

17

$x > 0, y > 0$ 일 때, $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq k\sqrt{x+y}$ 가 항상 성립하도록 하는 실수 k 의 최솟값을 구하시오.

▶ 코시-엔겔폼

• $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때,

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}, \quad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$$

(단, 등호는 $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ or $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ 일 때 성립)

[증명]



1등급 유제

양수 a, b, c 가 $a+b+c=6$ 을 만족 할 때, $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c}$ 의 최솟값을 구하시오.

18

양의 실수 a, b, c 에 대하여 $\frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c}$ 의 최솟값을 구하시오.

▶ 네스빗 부등식

$$\bullet \frac{a^2x}{y+z} + \frac{b^2y}{z+x} + \frac{c^2z}{x+y} \geq \frac{(a+b+c)^2 - 2(a^2+b^2+c^2)}{2}$$

[증명]

$$\bullet \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

[증명]

1등급 유제1

세 양수 a, b, c 에 대하여 부등식

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq k$$

이 성립할 때, k 의 최댓값을 구하시오.

1등급 유제2

세 양의 실수 x, y, z 에 대하여

$$\frac{9x(x+y)(z+x) + 25y(x+y)(y+z) + 36z(y+z)(z+x)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

의 최솟값을 구하시오.

* 원래 네스빗부등식의 본 모양은

$$\frac{a^2x}{ky+z} + \frac{b^2y}{kz+x} + \frac{c^2z}{kx+y} \geq \frac{(a+b+c)^2 - 2(a^2+b^2+c^2)}{1+k}$$

이다.

▶ **젠센 부등식**

- 함수 $y=f(x)$ 가 위로 볼록 $\rightarrow f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}$
- 함수 $y=f(x)$ 가 아래로 볼록 $\rightarrow f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$



1등급 유제1

$x > 0, y > 0$ 이고 $3x + 5y = 10$ 일 때, $\sqrt{3x} + \sqrt{5y}$ 의 최댓값을 구하시오.

01 Check ○○○

역은 참이고, 대우는 거짓인 명제인 것 만을 보기에서 있는 대로 고르시오. (단, a, b 는 실수이다.)

보기

- ㄱ. $a^2 = b^2$ 이면 $a^3 = b^3$ 이다.
- ㄴ. $|a| + |b| = 0$ 이면 $a^2 + b^2 = 0$ 이다.
- ㄷ. $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이면 $ab \neq 0$ 이다.

02 Check ○○○

실수 전체의 집합에서 명제

‘모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - 8x + k \geq 0$ 이다.’

의 부정이 참이 되도록 하는 자연수 k 의 최댓값을 구하시오.

03 Check ○○○

두 조건

$$p: 2 \leq x \leq 6,$$

$$q: x^2 - (a+1)x + a \geq 0$$

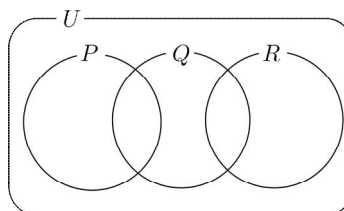
에 대하여 명제 ‘어떤 실수 x 에 대하여 p 이고 q 이다.’가 참이 되도록 하는 자연수 a 의 개수를 구하시오.

04 Check ○○○

전체집합 U 에 대하여 세 조건 p, q, r

r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하자.

세 집합 사이의 포함 관계가 오른쪽 벤다이어그램과 같을 때, 참인 명제인 것만을 보기에서 있는 대로 고르시오



보기

- ㄱ. 어떤 $x \in P$ 에 대하여 $x \notin Q$ 이다.
- ㄴ. 모든 $x \in P$ 에 대하여 $x \notin R$ 이다.
- ㄷ. 어떤 $x \in Q - P$ 에 대하여 $x \in R$ 이다.

05 Check ○○○

좌표평면 위에 두 점 $A(-1, 3)$, $B(1, -3)$ 과 집합 $C = \{(x, y) \mid 3|x| + |y| = k\}$ 가 나타내는 도형이 있다. 명제 '집합 C 에 속하는 어떤 점 P 에 대하여 $\angle APB = 90^\circ$ 이다.'가 참이 되도록 하는 자연수 k 의 개수를 구하시오.

06 Check ○○○

전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 에서의 세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하자. 두 조건 p, q 가 $p : x$ 는 소수이다., $q : x$ 는 짝수이다. 일 때, 명제 $(p \text{이고 } \sim q) \rightarrow r$ 가 참이 되도록 하는 집합 R 의 개수를 구하시오.

07 Check ○○○

양의 실수 전체의 집합에서의 세 조건

$$p : x \geq k,$$

$$q : 3x - 2 > 10,$$

$$r : x^2 - 10x \geq 24$$

에 대하여 p 는 q 이기 위한 충분조건이고, p 는 r 이기 위한 필요조건이고 충분조건은 아닐 때, 자연수 k 의 개수를 구하시오.

08 Check ○○○

세 집합 A, B, C 에 대하여 다음 세 명제 p, q, r 가 모두 참이다.

$$p : x \in A \text{이면 } x \in C \text{이다.}$$

$$q : x \in B \text{이면 } x \notin A \text{이다}$$

$$r : x \notin C \text{이면 } x \notin B \text{이다.}$$

$n(A) = 14, n(B) = 10, n(C) = 30$ 일 때, $n(C - (A \cup B))$ 를 구하시오.